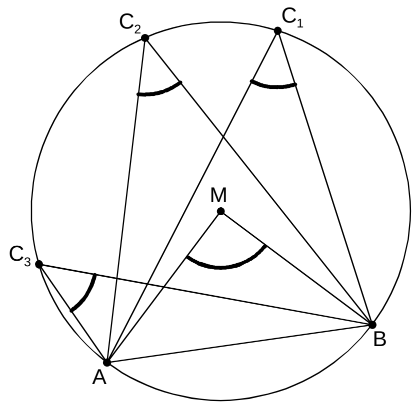
Winkel am Kreis

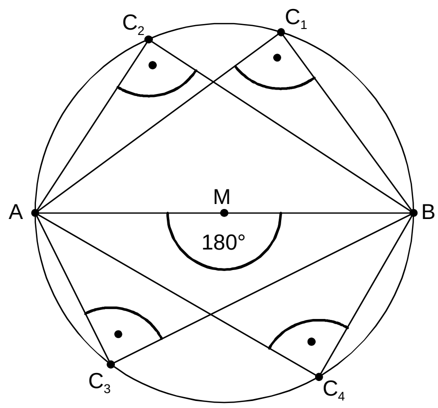
1 Randwinkelsatz

- Der Winkel AMB heißt **Mittelpunktswinkel** über der Sehne [AB].
- Die Winkel AC_nB sind die **Randwinkel** über der Sehne [AB].
- **Alle Randwinkel** über einer Sehne eines Kreises besitzen **das gleiche Maß** und sind **halb so groß** wie der dazugehörige **Mittelpunktswinkel**.



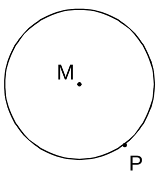
2 Thaleskreis (Sonderfall des Randwinkelsatzes)

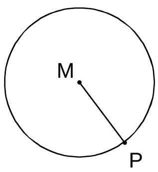
- Verbindet man die **Punkte C_n** des **Halbkreises** über einer Mittelsehne mit den Endpunkten A und B, so haben **alle Winkel AC_nB** bzw. **BC_nA** das Maß **90°**.
- Umgekehrt gilt: Hat der **Winkel ACB** bzw. **BCA** das Maß **90°**, liegt sein **Scheitel C** auf dem **Halbkreis** über der Mittelsehne [AB]



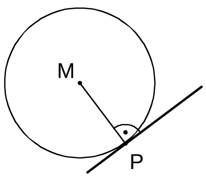
3 Tangentenkonstruktion

Fall1: Tangente im Berührpunkt P, der auf der Kreislinie k liegt.



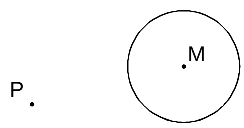


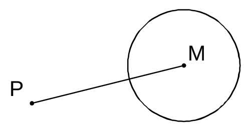
Zeichne die Strecke [MP] oder die Zentrale durch M und P.



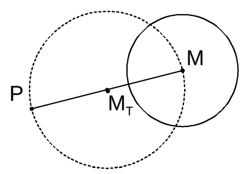
Zeichne die Senkrechte zur Strecke [MP] oder zur Zentrale durch M und P.

Fall 2: Tangenten von einem Punkt P aus an die Kreislinie k.

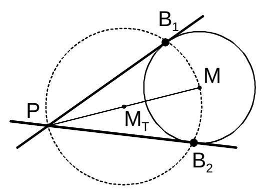




Zeichne die Strecke [MP].



Zeichne einen Kreis (Thaleskreis), dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke [PM] ist.



Die Schnittpunkte der beiden Kreise bilden die Berührpunkte B_1 und B_2 der beiden Tangenten.

Multiplikation und Division in $\mathbb{Q}$

Rechenregeln	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Vorzeichenregeln	$+\cdot+=+$	$+:+=+$
	$-\cdot-=+$	$-:-=+$
	$-\cdot+=-$	$-:+=-$
	$+\cdot-=-$	$+:-=-$

Potenzgesetze

1. Potenzgesetz	$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	Beispiel:	$3^3\cdot3^4=3^{3+4}=3^7$ $3^3\cdot3^{-4}=3^{3-4}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

Ü: a) $5^5\cdot5^7=$ b) $0{,}5\cdot0{,}5^2\cdot0{,}5^5=$ c) $(-2)^3\cdot(-2)^{-3}=$

2. Potenzgesetz	$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$	Beispiel:	$(3^3)^4=3^{3\cdot4}=3^{12}$

Ü: a) $(3{,}5^5)^5=$ b) $[(k^4)^2]^2=$ c) $\left[\left(-1\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-7}=$

3. Potenzgesetz	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	Beispiel:	$2^4\cdot3^4=(2\cdot3)^4=6^4$

Ü: a) $5^2\cdot3^2=$ b) $x^{-3}\cdot y^{-3}\cdot z^{-3}=$ c) $(-2{,}5)^7\cdot(-2)^7=$

4. Potenzgesetz	$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	Beispiel:	$\frac{3^4}{3^3}=3^{4-3}=3^1=3$ $\frac{3^3}{3^4}=3^{3-4}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

Ü: a) $7^4:7^7=$ b) $(-2{,}2)^{-3}:(-2{,}2)^3=$ c) $\frac{2^{-2}}{2^{-5}}=$

5. Potenzgesetz	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$	Beispiel:	$\frac{2^4}{6^4}=\left(\frac{2}{6}\right)^4=\left(\frac{1}{3}\right)^4$

Ü: a) $2^{-2}:14^{-2}=$ b) $(-8)^5:4^5=$ c) $\frac{3^{-1}}{9^{-1}}=$

Lösen von (Un)gleichungen durch Äquivalenzumformungen

1 Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert.

Beispiele: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

1.
$$\begin{aligned} & -2\cdot x+6=3 && |-6 \\ \Leftrightarrow\ & -2\cdot x=-3 && |:(-2) \\ \Leftrightarrow\ & x=1{,}5 && \\ & \mathbb{L}=\{1{,}5\} && \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\cdot x-5=-7 && |+5 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4}\cdot x=-2 && |\cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & x=-8 && \\ & \mathbb{L}=\{-8\} && \end{aligned}$$

2 Ungleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl multipliziert oder durch sie dividiert,
- beide Seiten mit der gleichen **negativen Zahl** multipliziert oder durch sie dividiert **und** das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

Beispiele: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

1.
$$\begin{aligned} & -2\cdot x<14 && |:(-2) \\ \Leftrightarrow\ & x>-7 && \text{Inversion!} \\ & \mathbb{L}=\{x\,|\,x>-7\} && \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} & 6\cdot x>-27 && |:6 \\ \Leftrightarrow\ & x>-4{,}5 && \\ & \mathbb{L}=\{x\,|\,x>-4{,}5\} && \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}\cdot x+5\geqq-3 && |-5 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{4}\cdot x\geqq-8 && |\cdot(-4) \\ \Leftrightarrow\ & x\leqq 32 && \text{Inversion!} \\ & \mathbb{L}=\{x\,|\,x\leqq 32\} && \end{aligned}$$

Ü: Löse durch Äquivalenzumformungen die folgenden Gleichungen und Ungleichungen mit $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$:

a) $-5x+36=28$

b) $-x-67\leqq 34$

c) $2x+13\leqq-18$

d) $-12x-41>-23$

e) $(177-202)\cdot x+296=411$

f) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x<-\frac{1}{6}$

g) $2^3-x\geqq 3^2\cdot 2$

Indirekte Proportionalität

Entspricht bei einer Zuordnung von Größen das **n-fache** der einen Größe dem **n-ten Teil** der anderen Größe, so heißt diese Zuordnung indirekte Proportionalität.

Beispiel: Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 24 cm². Wenn $\mathbb{G} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ist dies für acht Rechtecke verschiedener Länge x cm und Breite y cm möglich.

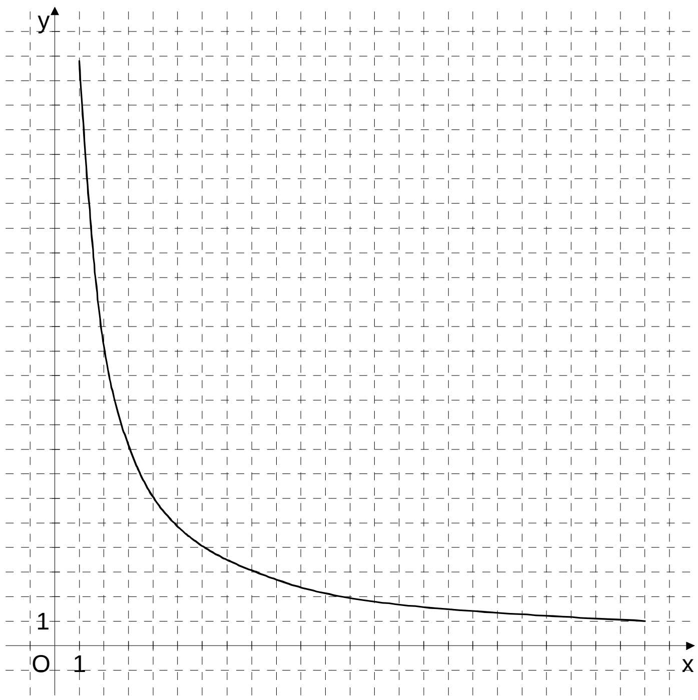
$\cdot 8$ $\cdot 2$ $\cdot 3$

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

$:2$ $:3$ $:8$

Eigenschaften:

- Alle Zahlenpaare $(x \mid y)$ einer indirekten Proportionalität sind **produktgleich**. Das Produkt $\mathbf{x \cdot y}$ hat immer den **gleichen Wert**.
  Beispiel: $x \cdot y = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = 24 \cdot 1$
  Sprechweise: „ x und y sind zueinander indirekt proportional“
  Schreibweise: $y \sim \frac{1}{x}$
- Der Graph einer indirekten Proportionalität ist ein **Hyperbelast**. ($\mathbb{G} = \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$)
  Beispiel:



Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Unter Zinsen (kurz: **Zins**) versteht man den Geldbetrag, den man nach einer bestimmten Zeit für geliehenes Geld bezahlen muss oder für verliehenes Geld bekommt.

Es entsprechen sich:

Prozentwert (PW)	Prozentsatz (p)	Grundwert (GW)
↓	↓	↓
Jahreszins (Z_J)	**Zinssatz (p)**	**Kapital (K)**

Die so berechneten Zinsen Z_J beziehen sich auf ein Jahr (Jahreszins). Wird ein anderer Zeitraum betrachtet, so muss der Jahreszins auf diesen Zeitraum umgerechnet werden. Ein Geschäftsjahr hat 365 Tage.

Zins für 1 Jahr (Jahreszins)	$Z_J = \frac{K \cdot p}{100}$	Zins für 1 Tag	$Z_t = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 365}$
Zins für n Jahre	$Z_n = \frac{K \cdot p \cdot n}{100}$	Zins für T Tage	$Z_T = \frac{K \cdot p \cdot T}{100 \cdot 365}$

Beispiel: Berechne die Zinsen für 292 Zinstage, wenn ein Kapital $15\,000,00$ € zu 8% verliehen wird.

$Z_T = \frac{15000\text{ €} \cdot 8 \cdot 292}{100 \cdot 365}$ $\quad Z_T = 960\text{ €}$ $\quad$ Der Zins für 292 Tage beträgt 960,00 €.

Übungen:

1.0 Auf einem Sparbuch, das mit 3,75% verzinst wird, sind 940,00 €.

1.1 Berechne die Zinsen nach einem Jahr.

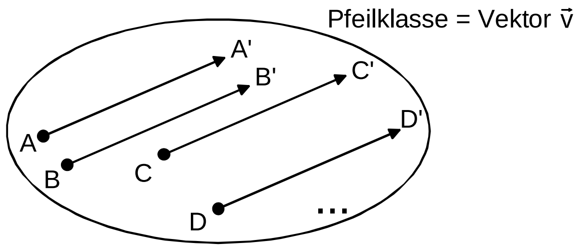
1.2 Berechne den Zinsertrag für das zweite Jahr, wenn die Zinsen des ersten Jahres dem Kapital zugerechnet werden.

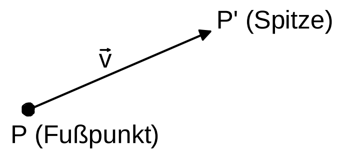
2 Herr Maurer gibt 10000,00 € zu 6,5% auf die Bank und legt alljährlich die gewonnen Zinsen wieder zu seinem Kapital. Damit erhöht sich sein Kapital Jahr für Jahr um den Zinsertrag. Berechne sein Endkapital nach 5 Jahren.

Die Parallelverschiebung

Eigenschaften: $P \overset{\vec{v}}{\longmapsto} P'$

- Bei allen Parallelverschiebungen sind die Verbindungsstrecken von Urpunkt P und Bildpunkt P' **parallel**, **gleich lang** und **gleich gerichtet**.
- Sie bilden eine Pfeilklasse. Jede Pfeilklasse heißt **Vektor**. Durch jede Parallelverschiebung ist umkehrbar eindeutig ein Vektor bestimmt.
- Alle Parallelverschiebungen haben **keinen** Fixpunkt.
- Alle Parallelverschiebungen sind **längen-** und **winkeltreu** (**„Kongruenzabbildung“**).
- Alle Parallelverschiebungen sind **geraden-** und **kreistreu**.





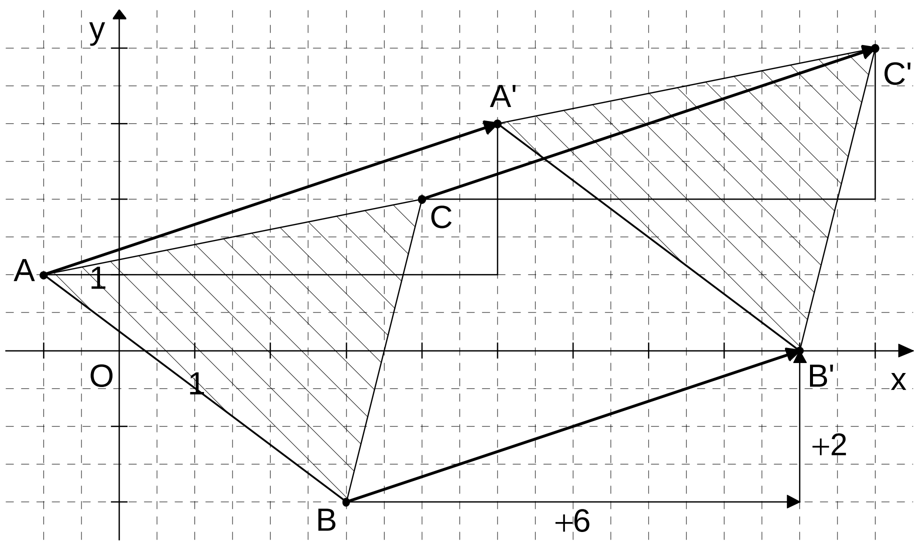
Jeder Vektor $\vec{v}$ lässt sich im Koordinatensystem durch seine Koordinaten eindeutig festlegen. Die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{PP'}$ und damit des Vektors $\vec{v}$ werden durch die Koordinaten des **Fußpunktes** $\mathbf{P(x|y)}$ und die Koordinaten der **Spitze** $\mathbf{P'(x'|y')}$ festgelegt.
Man berechnet sie nach der Regel:

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$$

„Spitze minus Fuß“

z. B. $P(-2|1)$ und $P'(4|3)$ $\quad \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 3-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel: $\Delta ABC \overset{\vec{v}=\binom{6}{2}}{\longmapsto} \Delta A'B'C'$ mit $A(-1|1)$, $B(3|-2)$ und $C(4|2)$



Gesetze zur Vektorrechnung

1 Kommutativgesetz und Assoziativgesetz bei der Addition von Vektoren

Kommutativgesetz $\overrightarrow{a} \oplus \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \oplus \overrightarrow{a}$ Assoziativgesetz $(\overrightarrow{a} \oplus \overrightarrow{b}) \oplus \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \oplus (\overrightarrow{b} \oplus \overrightarrow{c})$

2 Berechnung von Summenvektoren

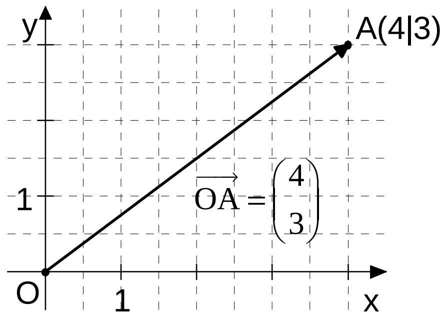
Allgemein $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+(-4) \\ 2+1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3 Ortspfeil

Ortspfeile sind Pfeile, die vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem Punkt im Koordinatensystem führen. Die Koordinaten des Ortspfeils sind dieselben wie die Koordinaten des Punktes.

z. B.: $A(4|3)$ $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



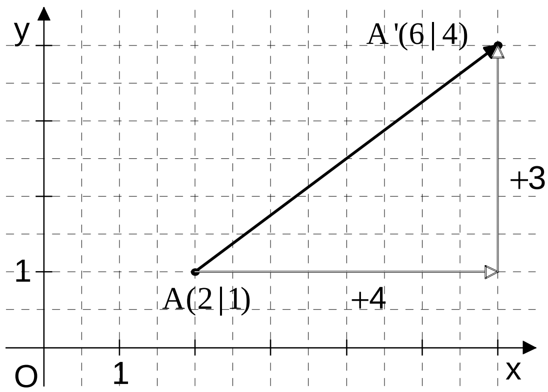
4 Berechnung der Koordinaten von Bildpunkten

Allg.: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+v_x \\ y+v_y \end{pmatrix}$ $A'(x+v_x \,|\, y+v_y)$

z. B.: $A(2|1)$ $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 1+3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $A'(6|4)$



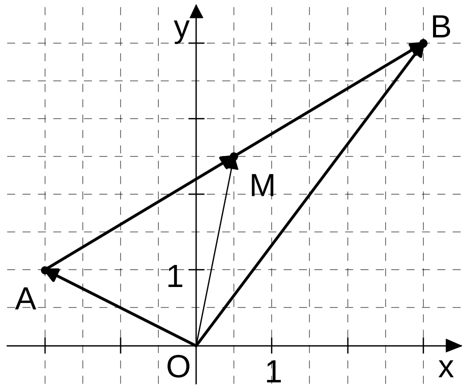
5 Berechnung der Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke [AB]

Allg.: $A(x_A \,|\, y_A)$, $B(x_B \,|\, y_B)$, $M(x_M \,|\, y_M)$

$M(x_M \,|\, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \middle| \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

z. B.: $A(-2|1)$, $B(3|4)$

$M\left(\frac{-2+3}{2} \middle| \frac{1+4}{2} \right) = M(0{,}5 \,|\, 2{,}5)$

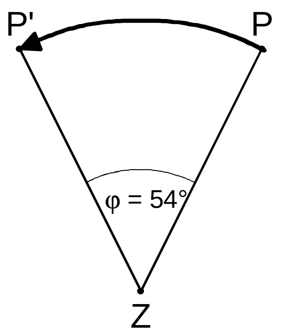


Die Drehung

Eigenschaften: $P \xmapsto{Z;\,\varphi} P'$

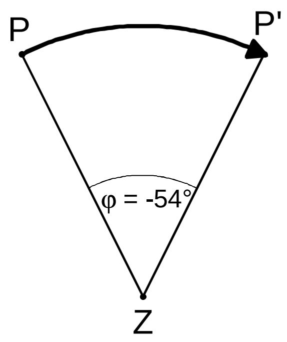
- Jede Drehung besitzt einen Punkt Z als Drehzentrum und einen Winkel φ als Drehwinkel.
- Die Verbindungsstrecken [PZ] von Urpunkt P und Drehzentrum Z und [P'Z] vom zugehörigen Bildpunkt P' und Drehzentrum Z sind gleich lang und schließen den Winkel PZP' mit dem Maß φ ein.
- Alle Drehungen haben nur das **Zentrum Z als Fixpunkt**.
- Alle Drehungen sind **längen-** und **winkeltreu** (**„Kongruenzabbildung“**).
- Alle Drehungen sind **geraden-** und **kreistreu**.

positive Drehrichtung

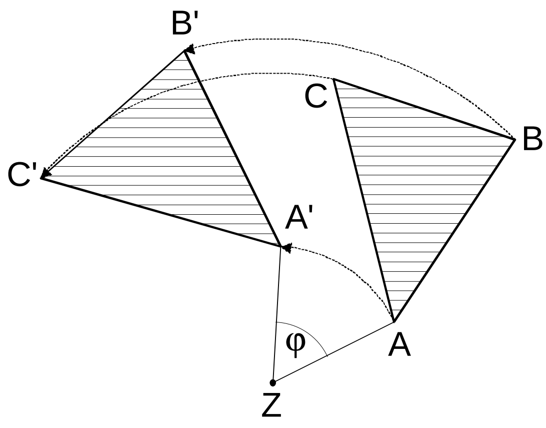


$P \xmapsto{Z;\,\varphi=54°} P'$

negative Drehrichtung



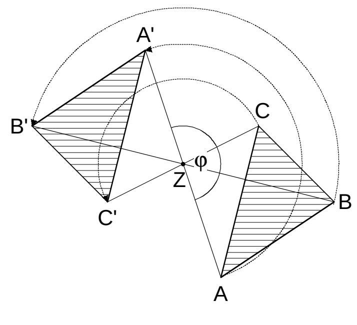
$P \xmapsto{Z;\,\varphi=-54°} P'$



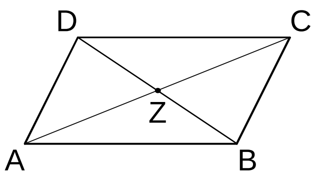
$\Delta ABC \xmapsto{Z;\,\varphi} \Delta A'B'C'$

Eine **Drehung um 180°** nennt man auch eine **Punktspiegelung** am Zentrum Z.

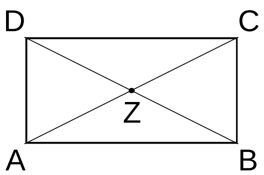
$\Delta ABC \xmapsto{Z;\,\varphi=180°} \Delta A'B'C'$



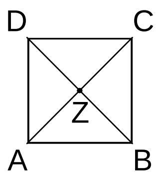
Merke: Eine Figur heißt punktsymmetrisch, wenn sie durch Drehung an einem Punkt Z um 180° auf sich selbst abgebildet werden kann.



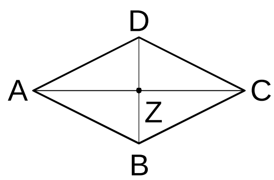
Parallelogramm



Rechteck



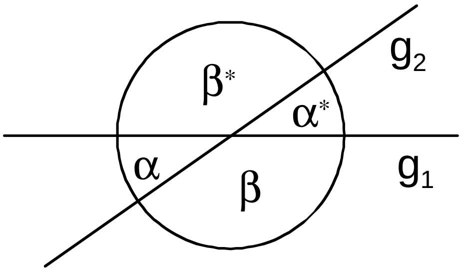
Quadrat



Raute

Regeln für Winkel

1 Neben- und Scheitelwinkel

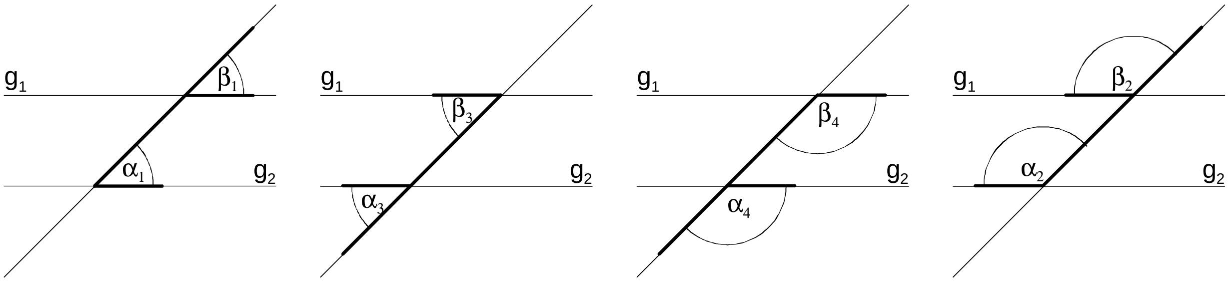


Scheitelwinkel sind gleich groß:
$\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°:
$\alpha + \beta = 180°$

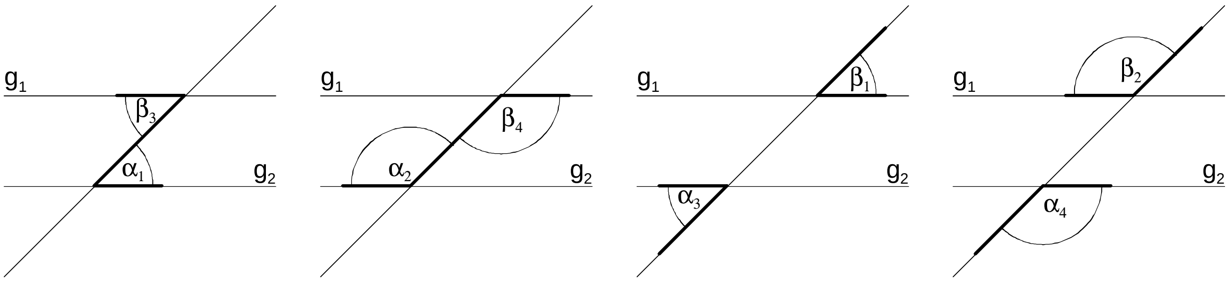
2 Winkel an Parallelen ($g_1 \parallel g_2$)

2.1 Stufenwinkel (F-Winkel)



$\alpha_1 = \beta_1$ $\alpha_3 = \beta_3$ $\alpha_4 = \beta_4$ $\alpha_2 = \beta_2$

2.2 Wechselwinkel (Z-Winkel)



$\alpha_1 = \beta_3$ $\alpha_2 = \beta_4$ $\alpha_3 = \beta_1$ $\alpha_4 = \beta_2$

3 Innenwinkelsummen

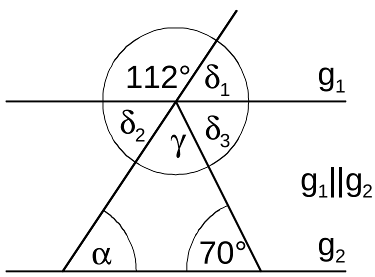
3.1 im Dreieck

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkelmaße der drei Innenwinkel 180°:
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

3.2 im Viereck

In jedem Viereck beträgt die Summe der Winkelmaße der vier Innenwinkel 360°:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

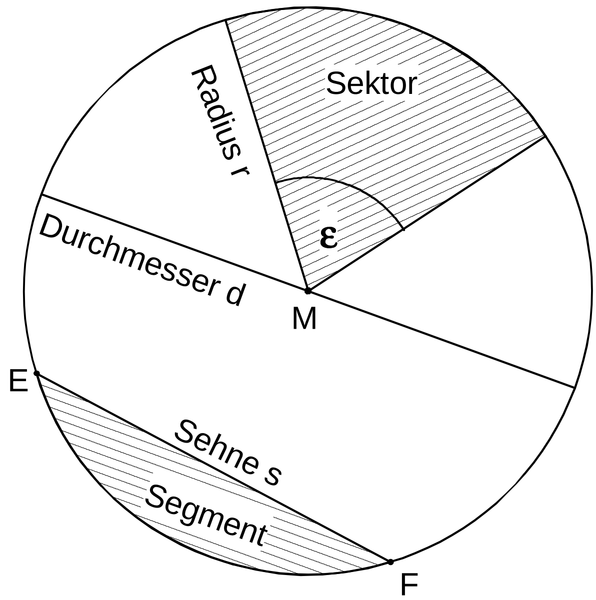
Ü: Gib die fehlenden Winkelmaße an und begründe.



Der Kreis

1 Kreis k

- Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte E und F heißt **Sehne s**.
- Die Sehne s teilt die Kreislinie in zwei **Kreisbögen** $\overset{\frown}{EF}$ und $\overset{\frown}{FE}$.
- Das von Kreissehne und Kreisbogen begrenzte Flächenstück ist ein **Kreissegment**.
- Ein von zwei Radien und einem Kreisbogen begrenztes Flächenstück ist ein **Kreissektor**.
- Die beiden Radien schließen den **Mittelpunktswinkel** mit dem **Maß ε** ein.



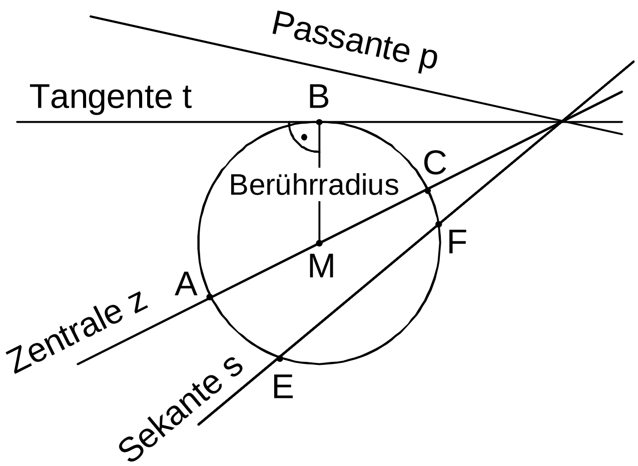
2 Lagebeziehung von Kreis k und Gerade

Passante p: $p \cap k = \emptyset$

Tangente t: $t \cap k = \{B\}$

Zentrale z: $z \cap k = \{A; C\}$ mit $M \in z$

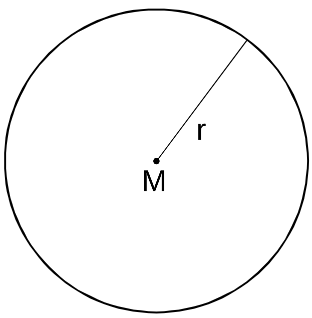
Sekante s: $s \cap k = \{E; F\}$



3 Berechnungen am Kreis

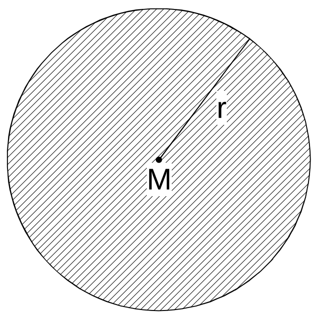
Für den Kreisumfang **u** gilt:

$$\mathbf{u = 2 \cdot r \cdot \pi}$$



Für den Inhalt der Kreisfläche **A** gilt:

$$\mathbf{A = r^2 \cdot \pi}$$



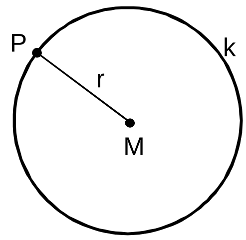
Für die Kreiszahl π wird vorläufig der Wert $\pi \approx 3{,}14$ oder $\pi \approx \frac{22}{7}$ benutzt.

Geometrische Ortslinien

1 Kreis

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von **einem Punkt die gleiche Entfernung** haben.

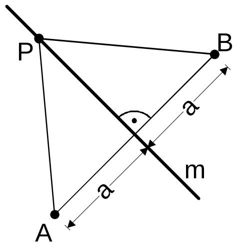
$k(M; r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$



2 Mittelsenkrechte

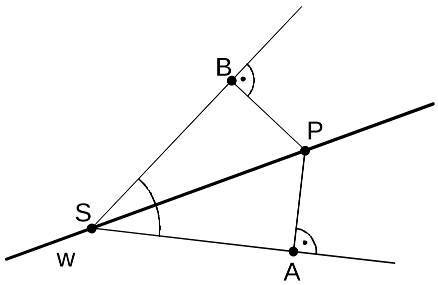
Die Mittelsenkrechte ist der geometrische Ort aller Punke, die von **zwei Punkten die gleiche Entfernung** haben.

$m_{[AB]} = \{P \mid \overline{AP} = \overline{BP}\}$



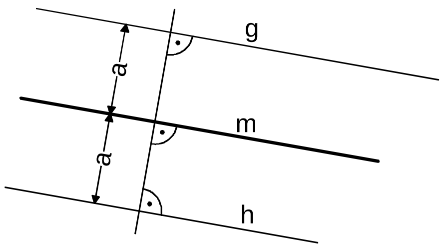
3 Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende ist der geometrische Ort aller Punkte, die von **beiden Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand** haben.



4 Mittelparallele

Die Mittelparallele zweier paralleler Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den **beiden Geraden den gleichen Abstand** haben.



5 Parallelenpaar

Das Parallelenpaar zu einer Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von **einer Geraden den gleichen Abstand a** haben.